第二章 线性规划

2.1线性规划问题及其基本概念

2.2 线性规划的基本理论

- 2.2.1解的几何特征
- Δ2.2.2 对偶理论与最优性条件（视频2.8）

2.3 线性规划的单纯形算法

- 2.3.1算法介绍（基本思想、最优性的判定、基可行解的转换）
- 2.3.2单纯形表（天然含有单位阵作为基矩阵的情形，视频2.5)
- Δ2.3.3初始基可行解的求法
  (包括大M法（（视频2.6）& 二阶段法（视频2.7））)

1、n元向量的线性运算

定义　设$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in\mathbb{P}^n,\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\in\mathbb{P}^n$，规定：

(1) $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 当且仅当 $a_i=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n;$

(2) 加法运算：

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]\in\mathbb{P}^n;$$

(3) 数乘运算：

$\forall k\in\mathbb{P},\ \forall\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n],$　规定　$k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n].$

2、矩阵的定义

定义 给定$m\times n$个数$a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，将它们按一定次序排成一个$m$行$n$列的矩形数表，再加括号，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个m行n列的矩阵，简称为$m\times n$矩阵。

矩阵A的(i,j)元

记为 $A = A_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

这$m\times n$个数称为A的元素,简称为元.

若矩阵$A=[a_{ij}]$与$B=[b_{ij}]$同型，且对应元素相等，即

$$a_{ij} = b_{ij}\ (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵A与B相等,记作 $A = B$.

3、矩阵的转置

定义 把矩阵 A 的行依次变为同序数的列得到的新矩阵，叫做 A 的转置矩阵，记作 A^{T}.

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}$, $\quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix}$;

$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix}$, $\quad B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}$.

矩阵的加法

1、定义

设有两个$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}],\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{B}$的和记作$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注　只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.（可加的条件）

例如

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12+1 & 3+8 & -5+9 \\ 1+6 & -9+5 & 0+4 \\ 3+3 & 6+2 & 8+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & 4 \\ 7 & -4 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

对应元相加

矩阵的数量乘法（数乘）

定义

规定矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积, 记作 $k\boldsymbol{A}$.

矩阵的乘法（矩阵与矩阵相乘）

定义

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ik}]$是一个$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}=[b_{kj}]$是一个$n\times s$矩阵，规定矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$的乘积是一个$m\times s$矩阵$\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,s),$$

记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

行乘列法则

例 1

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}_{2\times 2}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

?

例2 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -1 & 4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

则

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$$

注（可乘条件）左列数=右行数.

例4 设矩阵$A=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$, $B=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$，

求AB 和 BA.

解

$$AB=[x_1,x_2,\cdots,x_n]\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

$$BA=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & \cdots & y_1x_n \\ y_2x_1 & y_2x_2 & \cdots & y_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_nx_1 & y_nx_2 & \cdots & y_nx_n \end{bmatrix}$$

$m\times n$线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad \cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} & \cdots & \boldsymbol{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}$$

$m \times n$线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\beta}$$

分块矩阵的运算概念

对于行数和列数较高的矩阵A，为了简化运算，经常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算．具体做法是：将矩阵A用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为A的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix},$$

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

矩阵特殊分块乘法应用

（1）设 $A=[a_{ij}]\in \mathrm{P}^{m\times n}, X=[x_1,x_2,\cdots x_n]^{\mathrm{T}}\in \mathrm{P}^n$，则

$$\boldsymbol{AX}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]\in \mathbf{P}^m$为矩阵 A的第j个列向量.

4、矩阵的初等变换

定义 下面三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) 对调两行（对调i,j两行,记作$r_i \leftrightarrow r_j$）；

（对换变换）

(2) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行的所有元素;

(用***k***乘第***i***行，记作 kr_i **)**（倍乘变换）

(3) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去（第 j 行的 k 倍加到第 i 行上记作$r_i + kr_j$).

（倍加变换）

$$
\boldsymbol{A} \to \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow 第i行 \\ \\ \leftarrow 第j行 \\ \\ \\
\end{array}
$$

把$\boldsymbol{A}$的第 i，j两行对调，记为$r_i \leftrightarrow r_j$.

$$A \xrightarrow{r_i \times k} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘上非零常数 k，记为 $r_i \times k$.

$$A \xrightarrow{r_i + kr_j} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

把 A的第 j 行乘 k 加到第 i 行上去 $(r_i + kr_j)$.

例 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2. \end{cases}$

解 对增广矩阵$\tilde{A}$施行初等行变换：

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & \vdots & -1/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

$r(A)=r(\tilde{A})=2<4$, 故方程组有无穷多解, 并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2, \\ x_3 = \quad\quad 2x_4 + 1/2. \end{cases}$$

于是所求通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, (k_1, k_2 \in \mathbb{P}).$$

向量组的线性相关性

（一） 线性相关与线性无关的概念

定义4.1.3 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（$s\geq 1$）是$\mathbb{P}^n$中的向量组,

如果存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

则称向量组(I):$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$在数域$\mathbb{P}$上线性相关；否则称$(\mathrm{I})$在数域$\mathbb{P}$上线性无关.

§2.1 线性规划问题及基本概念

一. 线性规划模型

例1 生产计划问题

某工厂利用某种原材料生产A、B、C三种产品，它们的单位产品所需材料的数量和耗费的加工时间各不相同，如下表。A、B、C单位产品的利润为4、5、7千元。问：该厂应如何安排生产计划，才能使所获利润最大？

资源 \ 产品	A	B	C	资源总量
原材料	2	1.5	3	100
工时	1	2	2	150

解：1. 确定决策变量

设 A、B、C 的产量分别为 x_1、x_2、x_3。

2. 确定目标函数

设总利润为S，则 $S = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$

3. 确定约束条件

$$2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \le 100$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 150$$
$$x_i \ge 0, i = 1,2,3$$

4. 数学模型 $\min \quad S = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + 1.5x_2 + 3x_3 \le 100 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 150 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,3 \end{cases}$$

线性规划模型：

(1)一组决策变量；

(2)一个线性目标函数；

(3)一组线性的约束条件。

线性规划模型 (LP)的一般形式：

$$\min(\max)\ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq (=\leq) b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq (=\leq) b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq (=\leq) b_m \\
& x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n \geq (=\leq) 0
\end{aligned}
$$

二. 标准型

1. 标准型 $\min \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

其中，$b_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m$

记$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T, b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \ge 0,$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, A = (a_{ij})_{m \times n}$,则线性规划的标准型可记为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

2. 化标准型

(1) 目标函数:

原问题目标函数: $\max \quad c^T x \Rightarrow \min \quad -c^T x$

(2) 约束条件:

(i) 原问题条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \Lambda + a_{in}x_n \le b_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \Lambda + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$ x_{n+i} 称为松弛变量。

(ii) 原问题条件: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \Lambda + a_{in}x_n \ge b_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \Lambda + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i \\ x_{n+i} \ge 0 \end{cases}$$ x_{n+i} 称为剩余变量。

(iii) 原问题: x_i无非负约束，则令 $\begin{cases} x_i = u_i - v_i \\ u_i, v_i \ge 0 \end{cases}$。

例1 将下述线性规划模型化为标准型。

$$\max \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 \leq 6 \\ x_1, x_3, x_4 \geq 0, x_2\text{无约束} \end{cases}$$

解： 令$x_2 = u_2 - v_2$,则

$$\min \quad -2x_1 + 3u_2 - 3v_2 - x_3 - 3x_4$$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 - u_2 + v_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2u_2 - 2v_2 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 + 4u_2 - 4v_2 - 3x_3 - x_4 + x_7 = 6 \\ x_1, x_3, x_4, x_5, x_7, u_2, v_2 \geq 0 \end{cases}$$

例：将以下线性规划化为标准型

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.}\ & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\
& -x_1 + \ \ x_2 \ge 1 \\
& \ \ \ x_1 + \ \ x_2 = 3 \\
& \ \ \ x_1,\quad x_2 \ge 0.
\end{aligned}
$$

三. 图解法

例 2 求解线性规划 $\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$

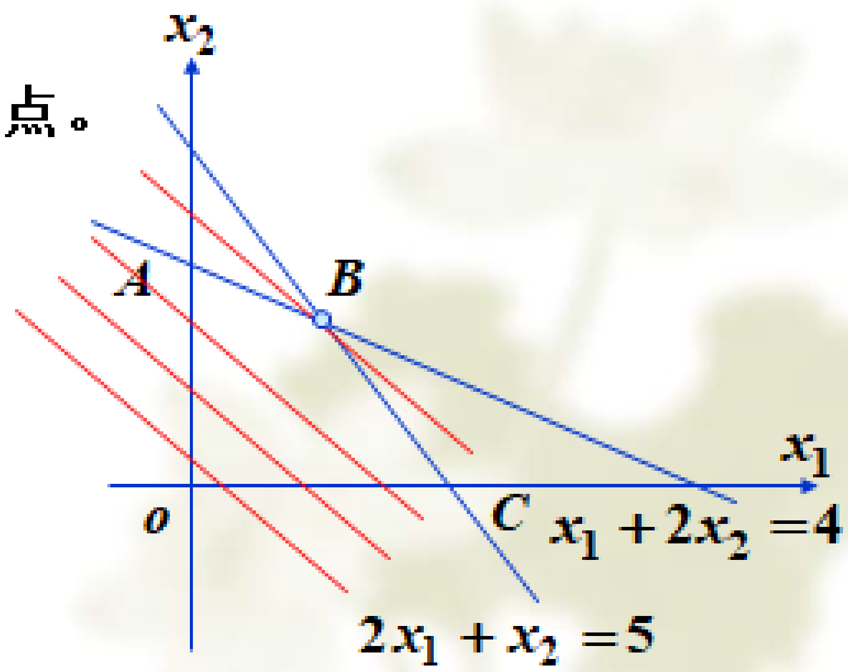
$$s.t. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：(1) 画出可行解的范围。

(2) 利用等值线平移的方法 求极值点。

以 z 为参数，则方程 $4x_1 + 3x_2 = z$ 表示一族等值平行线。

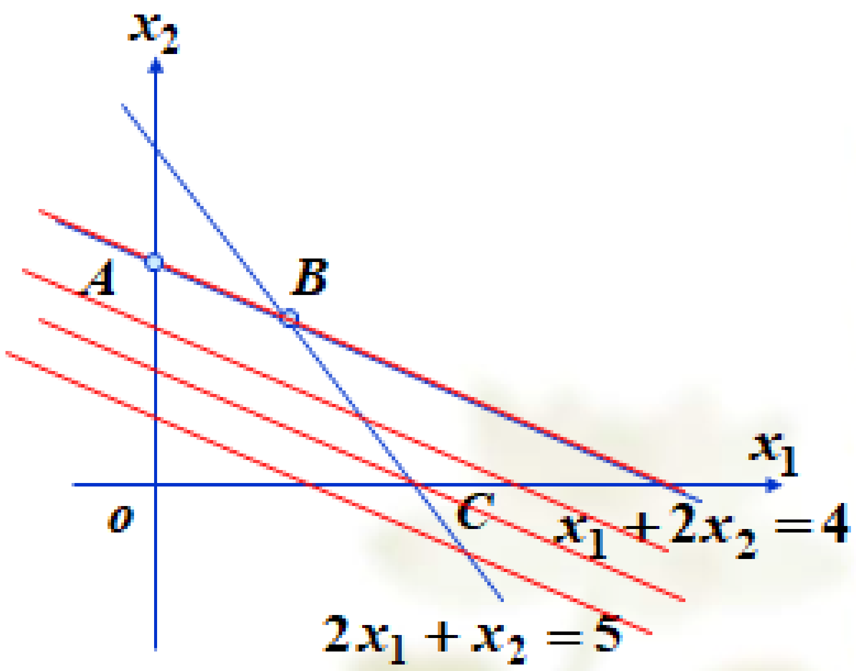
$\therefore$ 极大值点为顶点 B。



例 3　将例 2 中的目标函数改为　$z = x_1 + 2x_2$。

解：分析同例 2。

等值线：$x_1 + 2x_2 = z$。



$\therefore$ 极大值点为线段 $\overline{AB}$ 上的任一点。

例4 求解线性规划

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

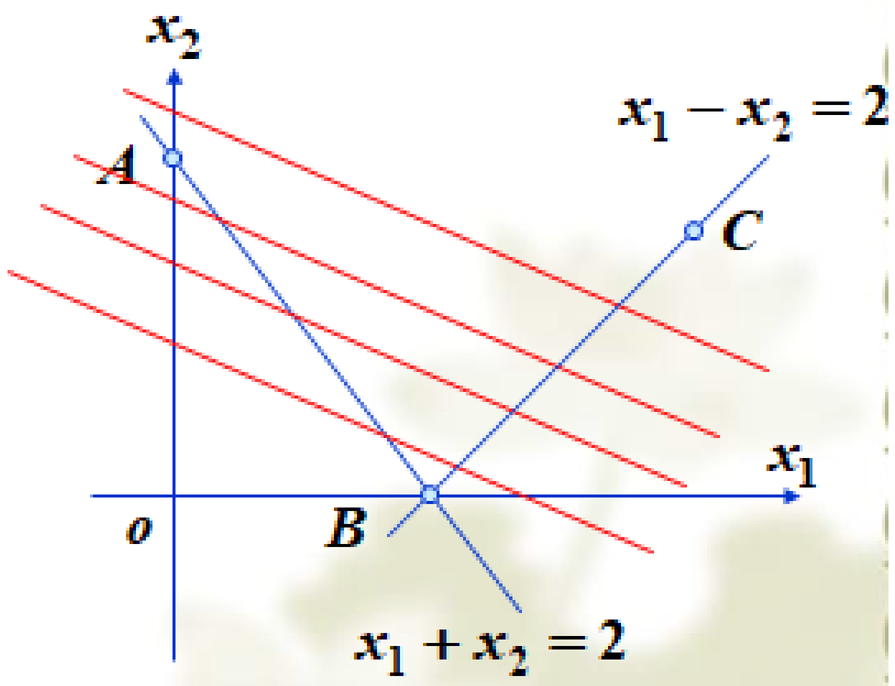
$$s.t. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

解：分析同例2。

等值线：$4x_1 + 3x_2 = z$。

$\therefore$ 不存在最大值。

原问题无界。



结果：

$$\text{线性规划问题的解} \Rightarrow \begin{cases} \text{有最优解} \Rightarrow \begin{cases} \text{在顶点取到唯一最优解} \\ \text{有无穷多最优解} \end{cases} \\ \text{无最优解} \Rightarrow \begin{cases} \text{解无界} \\ \text{可行域为空集} \end{cases} \end{cases}$$

2.1 将下列线性规划问题化为标准型.

(1)
$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
\min & 2x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & \leq & 12, \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & \geq & 6, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(2)
$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\min & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6, \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \geq & 12, \\
 & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 2, \\
 & x_1, & & & & x_3, & \geq & 0.
\end{array}
$$

(3)
$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\max & -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 1, \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2, \\
 & x_1 \geq -1, & & x_2, & & x_3, & \geq & 0.
\end{array}
$$

二　线性规划的一些基本概念

1　线性规划：　(*LP*)

$$\min \quad c^T x \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b \qquad (2)$$

$$x \geq 0 \qquad (3)$$

可行解(点)：同时满足（2），（3）式的解$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 称为(LP)的可行解（点）。

可行域：$F = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$

定理：(LP)是一个凸规划.

证明：

（1）证明可行域是凸集

任取$x_1, x_2 \in D, 0 \le \lambda \le 1$。

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda A x_1 + (1-\lambda)A x_2$$
$$= \lambda b + (1-\lambda) b$$
$$= b$$

所以$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in D$。即$D$是凸集。

（2）证明目标函数是凸函数

任给$\alpha \in [0,1]$,记 $f(x) = c^T x$,则

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) = c^T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha c^T x + (1-\alpha)c^T y \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

2 线性规划解的概念

记$A=(P_1\ P_2\ \cdots P_n\ )$,其中$P_j$ 表示A 的第j列，那么线性规划的标准型还可以表示为

$$\min \quad c^T x$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_j P_j = b,\ \ x_j \geq 0,\ \ j=1,2,\cdots,n.$$

基矩阵： 设系数矩阵$A_{m\times n}$的秩为m ，且$B_{m\times m}$为A 中的一个非奇异子矩阵,则称B为A的（或问题（LP）的）一个基矩阵.

不妨记为B=(P_1,P_2,…,P_m)，并记N =(P_{m+1},P_{m+2},…,P_n), 则 A=(B, N).

非基矩阵： 称N为对应的非基矩阵；

基向量： 称基矩阵B 的列向量$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 为基向量；

非基向量： 称非基矩阵N 的列向量$P_{m+1}, \ldots, P_n$ 为非基向量；

基变量： 称与基向量对应的变量$x_1, x_2, \ldots, x_m$ 为基变量；

非基变量： 除基变量之外的其余变量$x_{m+1}, \ldots, x_n$ 为非基变量。

(2) 由$Ax = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_m P_m + x_{m+1} P_{m+1} + \ldots + x_n P_n = b$,

得：$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_m P_m = b - x_{m+1} P_{m+1} - \ldots - x_n P_n$,

令非基变量$(x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)^T = 0$, 得$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)^T = B^{-1} b$.

基解：令非基变量为零，则此时方程组为$\sum_{j=1}^{m} x_j P_j = b$ 有唯一解，记为$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)^T$, 记 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0, 0, \ldots, 0)^T$,

称x^0为与基矩阵B 对应的基解。

注：基解个数$\le C_n^m$

(3) 基可行解: 非负的基解被称为基可行解。

注：基可行解中正分量的个数最多为m 个。

(4) 退化、非退化:

若基可行解中正分量的个数恰好为m 个，则称此基可行解为非退化的； 否则，称其为退化的。

若(LP)的所有基可行解是非退化的，则称(LP)为非退化的； 否则，称(LP)为退化的。

例 求线性规划

$$\min \quad z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4$$

$$s.t. \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

的一个基解和基可行解.

解：系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$。

取 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，则令非基变量 $x_3 = x_4 = 0$，得

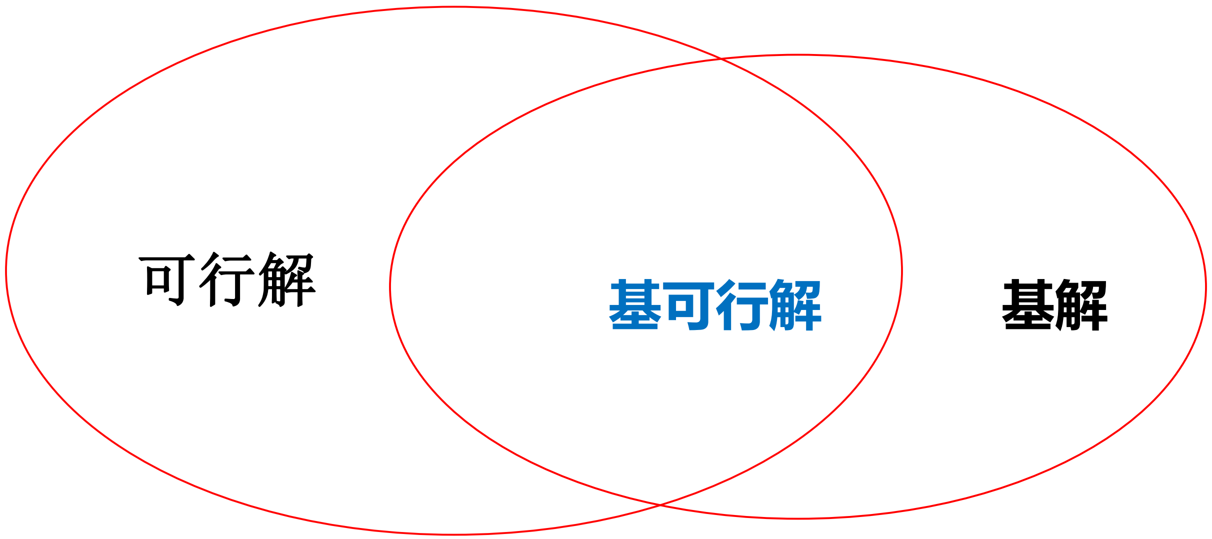
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} \\ x_2 = -\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$\therefore x^1 = (\dfrac{10}{3}, \dfrac{-7}{3}, 0, 0)^T$ 是基本解，但不是基本可行解。

取$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{pmatrix}$，则令非基变量$x_2=x_3=0$,得

$$\begin{cases}x_1+4x_4=8\\ 2x_1-x_4=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{16}{9}\\ x_4=\dfrac{14}{9}\end{cases}$$

$\therefore x^2=(\frac{16}{9},0,0,\frac{14}{9})^T$是基本可行解。



2.2 设x^1，x^2是某线性规划问题的最优解，试证明：x^1和x^2连线线段上的点都是该线性规划问题的最优解.

因为(LP)是凸规划，所以最优解集是凸集，根据凸集的定义，结论成立。

§2.2　线性规划的基本理论

一　解的几何特性

定理1： 假设$x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0,)^T\in F$，则$x^0$是线性规划$(LP)$的基可行解$\Leftrightarrow$ x^0的正分量$x_{i_1}^0,x_{i_2}^0,\dots,x_{i_r}^0$对应的$A$ 的列向量$P_{i_1},P_{i_2},\dots,P_{i_r}$线性无关。

极点：设$F\subseteq R^n$为凸集且$x\in F$，若F 中不存在两个不同点y,z 及某一实数$\alpha\in(0,1)$使得$x=\alpha y+(1-\alpha)z$，则称x为F 的极点。

注：　(LP)的可行域是由若干个超平面和半空间围成，是多面体，其顶点是极点。

定理2：　(LP)的可行解x 是基可行解的充要条件是x 是可行域的极点.

定理3：　若(LP)有可行解则（LP）必有基可行解.

定理2.2.3　若线性规划存在最优解，那么它必定存在某个基可行解是其最优解。

二、单纯形算法求解线性规划

单纯型算法的基本思想：首先找出一个基可行解（顶点），并判断它是否为最优解，如果是，则问题已解决；否则，找与该顶点相邻的顶点，并使得所找到的顶点处的目标函数值不大于前一个顶点处的目标函数值。由于线性规划问题的顶点个数不会超过C_n^m，因而经过有限次迭代后，或者找到问题的一个最优解，或者判断出该问题无最优解。

问题：

(1) 如何得到第一个基本可行解？

(2) 最优解的判定法则？

(3) 如何从一个基本可行解变换到另一个基本可行解？

2. 单纯形算法分析

例1 求解线性规划问题（LP）　$\min \quad Z=-4x_1-3x_2$

$$s.t.\quad \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 2x_1+x_2+x_4=5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0 \end{cases}$$

解：系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

令基$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,则基变量为$x_3$和$x_4$,非基变量为$x_1$和$x_2$。

$$\therefore \begin{cases} x_3=4-x_1-2x_2 \\ x_4=5-2x_1-x_2 \end{cases}$$

代入目标函数得　$z=0-4x_1-3x_2$

令 $x_1 = x_2 = 0$，则 $\begin{cases} x_3 = 4 \\ x_4 = 5 \end{cases}$

∴基本可行解 $x^1 = (0,0,4,5)^T$。目标函数值 $z^1 = 0$。

是否为最优解？利用目标函数分析。

$$\Theta \quad z = 0 - 4x_1 - 3x_2$$

目标函数中非基变量 x_1 和 x_2 的系数为负数，因此若 x_1 和 x_2 的取值可以增大为正数，则目标函数值就可以减小。

固定 x_2 不变，考察 x_1 是否可以增大？

$$\Theta \quad \begin{cases} x_3 = 4 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 5 - 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 4 - x_1 \\ x_4 = 5 - 2x_1 \end{cases}$$

$$\Theta \begin{cases} x_3 \ge 0 \\ x_4 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \le 4 \\ x_1 \le \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 \le \frac{5}{2}$$

且$x_1 = \frac{5}{2}$时，$x_4 = 0$。即x_1变为基变量，x_4变为非基变量

$$\begin{cases} x_3 = 4 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 5 - 2x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

$$\therefore \; z = -10 - x_2 + 2x_4$$

令$x_2 = x_4 = 0$，则$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\therefore$ 基本可行解 $x^2=(\frac{5}{2},0,\frac{3}{2},0)^T$。目标函数值 $z^2=-10$。

$\Theta \quad z=-10-x_2+2x_4$

因为x_2的系数为负，考察能否增大 x_2。固定 x_4，则

$$\begin{cases} x_3=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4 \\ x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x_2 \\ x_1=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x_2 \end{cases} \Rightarrow x_2\le 1$$

且 $x_2=1$时，$x_3=0$。即 x_2变为基变量，x_3变为非基变量。

$$\therefore \begin{cases} x_2=1-\frac{2}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4 \\ x_1=2+\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4 \end{cases} \Rightarrow \quad z=-11+\frac{2}{3}x_3+\frac{5}{3}x_4$$

令$x_3=x_4=0$,则$\begin{cases}x_1=2\\x_2=1\end{cases}$

$\therefore$基本可行解$x^3=(2,1,0,0)^T$。目标函数值$z^3=-11$。

因为目标函数$z=-11+\frac{2}{3}x_3+\frac{5}{3}x_4$,其中$x_3$和$x_4$的系数皆为正数

所以目标函数值不能再减小，所以最优解为

$x^*=x^3=(2,1,0,0)^T$，最优的目标函数值为$z^*=z^3=-11$。

3. 线性规划的单纯形算法

(1) 线性规划的规范式

考虑线性规划： （LP）

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x)=c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax=b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

仍然假设基矩阵为**B=($P_1,P_2,\ldots,P_m$)，非基矩阵N=($P_{m+1},P_{m+2},\ldots,P_n$)，**

则$A=(B,N)$. 把向量x和c也做相应分解$x=(x_B, x_N)^T$和$c=(c_B, c_N)^T$，

这样，$Ax=b$可以表示为

$$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}=\boldsymbol{b} \Rightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{b}$$

解得： $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N$

于是目标函数 $$f(x)=c^T x=(c_B,c_N)\begin{bmatrix}x_B\\x_N\end{bmatrix}=c_B^T x_B+c_N^T x_N$$
$$=c_B^T(B^{-1}b-B^{-1}Nx_N)+c_N^T x_N=c_B^T B^{-1}b+(c_N^T-c_B^T B^{-1}N)x_N$$

于是原线性规划问题变为
$$\min\ f(x)=c_B^T B^{-1}b+(c_N^T-c_B^T B^{-1}N)x_N$$
$$\text{s.t.}\quad x_B=B^{-1}b-B^{-1}Nx_N$$
$$x\ge 0$$

记

$$c_B^T B^{-1}b=f_0,\quad B^{-1}b=b'=(b_1',b_2',\dots,b_m')^T,$$
$$\sigma_N{}^T=c_N^T-c_B^T B^{-1}N=(\sigma_{m+1},\dots,\sigma_n)$$

$$B^{-1}N=\begin{bmatrix}a'_{1,m+1} & a'_{1,m+2} & \dots & a'_{1,n}\\ \dots & \dots & & \dots\\ a'_{m,m+1} & a'_{m,m+2} & \dots & a'_{m,n}\end{bmatrix}$$

则上面线性规划变为

$$\min\ f(x)=f_0+\sigma_N x_N$$
$$\text{s.t.}\quad x_i=b_i'-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}'x_j,\quad \forall i=1,2,\dots,m,$$
$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,n\ .$$

称为与基变量$x_1,\dots x_m$对应的规范式

注：由规范式，易得基解： $x^0=\begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_m' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

若$b_i'\geq 0\ (i=1,\cdots,m)$，则$x^0$为基可行解。

定义2.3.1

称$\sigma^{\mathrm{T}}:=c^T-c_B^TB^{-1}A$为变量 x的判别数向量，其中每个σ_j称为变量x_j 的判别数.

具体地，

基变量的判别数向量为$\sigma_B{}^{\mathrm{T}}:=c_B^T-c_B^TB^{-1}B=0$,

非基变量的判别数向量为$\sigma_N{}^{\mathrm{T}}:=c_N^T-c_B^TB^{-1}N$,

分量形式：$\sigma_j=c_j-\sum_{i\in S}a_{ij}'c_i, j\in T$ 为非基变量x_j 的判别数.

T为非基变量的指标集，S为基变量的指标集

(2)最优性的判定

定理2. 3. 1 假设x^0是(LP)对应于规范式的**基可行解**，若x^0 的所有判别数$\sigma_j \geq 0 \ (j=1,2,\cdots,n)$，则$x^0$是$(LP)$的一个最优解。

证明： 设x^1是任一可行点，则$x^1 \geq 0$，又判别数$\sigma \geq 0$（与x的取值无关），故有

$$f(x^1) = c^T x^1 = f_0 + \sigma_N^T x_N^1 \geq f_0 = f(x^0)$$

定理2.3.2

假设x^0是(LP)对应于基B 的**基可行解**，若存在 $k \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$ 使得$\sigma_k < 0$,并且对所有的$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$有$a_{ik}' \le 0$,则$(LP)$无最优解。

证明： 定义 $\boldsymbol{u} = (-a'_{1,k}, \ldots, -a'_{m,k}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, 其中1是第k个分量。对任意的$t$>0, 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0+t\boldsymbol{u}$, 以下证明$\boldsymbol{x}$是可行解:

(1) (非负)可知x的分量为

$$x_j = x_j^0 + tu_j = \begin{cases} b'_j - ta'_{j,k}, & j = 1, 2, \ldots, m, \\ 0 + t \cdot 1 = t, & j = k, \\ 0, & j = m+1, \ldots, n, j \ne k. \end{cases}$$

(2) (有规范表达式)所以x的分量可以写成

$$x_i = x_i^0 + tu_i = b'_i - \sum_{j=m+1}^{n} x_j a'_{i,j}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

即满足规范式的可行性。

而 $f(x) = f_0 + \sigma_N^T x_N = f_0 + t\sigma_k$ ， 令 $t \to +\infty$ ， 可得 $f(x) \to -\infty$

所以（LP）无最优解.

(3) 基可行解的转换

当存在 $s \in \{m+1,...,n\}$使得$\sigma_s < 0$,并且存在$r \in \{1,2,...,m\}$使得$a_{rk}' > 0$时

step1. 确定入基变量:任一与负判别数相对应的变量都可以作为入基变量. 一般令

$\sigma_k := \min\{\sigma_j : \sigma_j < 0\}$, 则$x_k$为入基变量，$P_k$为入基向量。

step2. 确定出基变量：由于 $x_i = b_i' - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}' x_j, \quad i = 1, \ldots, m$ ；

令 $x_j = 0, j = m+1, \ldots, n, j \neq k$, 则有 $x_i = b_i' - a_{ik}' x_k, \quad i = 1, \ldots, m$

a. 对满足 $a_{ik}' \leq 0$ 的 i，由于 $x_k \geq 0$，故 $x_i = b_i' - a_{ik}' x_k \geq 0$.

b. 对满足 $a_{ik}' > 0$ 的 i，为使此时所有的 $x_i = b_i' - a_{ik}' x_k \geq 0$，

$$记\ \theta_l := \frac{b_l'}{a_{lk}'} = \min\{\theta_i := \frac{b_i'}{a_{ik}'} : a_{ik}' > 0, i = 1, \ldots, m\},$$

令 $x_k = \theta_l$，则 x_l=0，又 $x_k \geq 0$，所以

$$x_i = b_i' - a_{ik}' x_k \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

从而得到新的可行解

$$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \ldots, x_m, 0, \ldots, x_k, \ldots, 0)^T.$$

定理2.3.3 按上述方法得到的 $\bar{x}$ 是(LP)的基可行解.

证明： 只需证明向量组 $p_1,\ldots,p_{l-1},p_k,p_{l+1},\ldots,p_m$ 线性无关. 假设线性相关，则存在不全为零的实数使得

$$y_1p_1+\ldots+y_{l-1}p_{l-1}+y_kp_k+y_{l+1}p_{l+1}+\ldots+y_mp_m=0$$

由于 $p_1,\ldots,p_{l-1},p_{l+1},\ldots,p_m$ 线性无关，所以 $y_k\neq0$, 于是

$$p_k= -(y_1p_1+\ldots+y_{l-1}p_{l-1}+y_kp_k+y_{l+1}p_{l+1}+\ldots+y_mp_m)/y_k$$

又由于

$$p_k=BB^{-1}p_k=Bp`_k=(p_1,\ldots,p_m)(a_{1k}`,\ldots,a_{mk}`)^T$$
$$=a_{1k}`\, p_1 +\ldots+ a_{lk}`\, p_l +\ldots+a_{mk}`\, p_m$$

以上两式相减得

$$(a_{1k}` +y_1/y_k)\, p_1+\ldots+(a_{l-1k}` + y_{l-1} /y_k)\, p_{l-1}+ \ldots + a_{lk}`\, p_l +\ldots+ (a_{l+1k}` + y_{l+1} /y_k)\, p_{l+1} +\ldots+(a_{mk}` + y_m/y_k)p_m =0$$

因为 $a_{lk}` >0$, 所以得 $p_1,\ldots,p_{l-1},p_l,p_{l+1},\ldots,p_m$ 线性相关，矛盾。

定理2.3.4 若x^0是LP的一个非退化的基可行解，$\bar{x}$是按上述方式得到的基可行解，则$c^T\bar{x} < c^T x^0$.

证明： 因为x^0是非退化的，所以 $b'_j > 0, j = 1, 2, \dots, m$

从而在 $\bar{x}$ 中，$x_k = b'_l / a'_{lk} > 0$ ， 又因为 $\sigma_k < 0$ ，故

$$c^T\bar{x} = f_0 + \sigma_k x_k < f_0 = c^T x^0$$

(4) 退化、非退化：

若基可行解中正分量的个数恰好为m个，则称此基可行解为非退化的；否则，称其为退化的。

单纯形表：设基矩阵B=I，则对应的初始单纯形表为

c_j			c_1	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	…	p_l	…	p_m	p_{m+1}	…	p_k	…	p_n	
c_1	p_1	b_1	1	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	$a_{1,k}$	…	$a_{1,n}$	ϑ_1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_l	p_l	b_l	0	…	1	…	0	$a_{l,m+1}$	…	$a_{l,k}$	…	$a_{l,n}$	ϑ_l
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_m	p_m	b_m	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	$a_{m,k}$	…	$a_{m,n}$	ϑ_m
σ_j			0	…	0	…	0	σ_{m+1}	…	σ_k	…	σ_n	

$B=(P_1,P_2,\dots,P_m)=I$， $N=(P_{m+1},P_{m+2},\dots,P_n)$，$A=(B,N)$， $c=(c_B,c_N)^T$，

$$b' = B^{-1}b = b,$$
$$\sigma_N = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$$

$$B^{-1}N = (a'_{i,m+j})$$
$$i = 1,2,\dots,m,$$
$$j = 1,2,\dots,n-m.$$

$$\theta_i = \frac{b_i'}{a_{ik}'}(a_{ik}' > 0), i = 1,\dots,m$$

例：用单纯形法解线性规划

$$\begin{aligned}
\min f &= -2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 \le 6, \\
& x_1 + 2x_2 \le 8, \\
& x_1 \le 4, \\
& x_2 \le 3, \\
& x_1,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

解：化成标准型，引入松弛变量，

$$\begin{aligned}
\min f &= -2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\
& x_1 + 2x_2 + x_4 = 8, \\
& x_1 + x_5 = 4, \\
& x_2 + x_6 = 3, \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \ge 0.
\end{aligned}
\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

取B=(P3,P4,P5,P6)=I, 所以初始单纯形表先记为

则N=(P1,P2),

b`=b=(6,8,4,3)^T,

c_B=0, c_N=(-2,-3)^T

$B^{-1}N = N$

$\sigma_N = c_N^T - c_B^T N = c_N$

c_j			-2	-3	0	0	0	0	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
0	P_3	6	1	1	1	0	0	0	
0	P_4	8	1	2	0	1	0	0	
0	P_5	4	1	0	0	0	1	0	
0	P_6	3	0	1	0	0	0	1	
σ_j			-2	-3	0	0	0	0	

因为

所以初始单纯形表为

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a'_{12}} = 6,$$

$$\theta_1 = \frac{b_2}{a'_{22}} = 4,$$

$$\theta_4 = \frac{b_4}{a'_{42}} = 3,$$

c_j			-2	-3	0	0	0	0	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
0	P_3	6	1	1	1	0	0	0	6
0	P_4	8	1	2	0	1	0	0	4
0	P_5	4	1	0	0	0	1	0	/
0	P_6	3	0	（1）	0	0	0	1	3
σ_j			-2	-3	0	0	0	0	

由于最后一列中，3最小，故取3所在行与最小判别数-3所在列的交叉点处的数作为主元（加括号表示）；

主元所在行为基准，对其他行均进行矩阵运算的初等行变换，把主元所在列的元素除主元外均变为0(包括判别数行)；得到以下单纯形表：

只有 $\sigma_1=-2<0$ ，所以计算 θ_i 得表2：

c_j			-2	-3	0	0	0	0	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
0	P_3	3	1	0	1	0	0	-1	3
0	P_4	2	（1）	0	0	1	0	-2	2
0	P_5	4	1	0	0	0	1	0	4
-3	P_2	3	0	1	0	0	0	1	/
σ_j			-2	0	0	0	0	3	

注：基向量变为3,4,5,2，从而c_B也改变。

于是主元选为2（表2中加括号表示）；重复之前的过程得表3

c_j			-2	-3	0	0	0	0	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
0	P_3	1	0	0	1	0	0	(1)	1
-2	P_1	2	1	0	0	1	0	-2	/
0	P_5	2	0	0	0	-1	1	2	1
-3	P_2	3	0	1	0	0	0	1	3
σ_j			0	0	0	2	0	-1	

于是主元选为1（表3中加括号表示）；重复之前的过程得表4

c_j			-2	-3	0	0	0	0	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	
0	P_6	1	0	0	1	0	0	(1)	
-2	P_1	4	1	0	0	1	0	0	
0	P_5	0	0	0	-2	-1	1	0	
-3	P_2	2	0	1	-1	0	0	0	
σ_j			0	0	1	2	0	0	

所有判别数非负，故有最优解，最优解为$x^*=(4,2,0,0,0,1)^T$,原问题的最优解为$x^*=(4,2)^T$,最优值为$f=-2*4-3*2=-14$.

三.初始基可行解的求法

即 x_s 的1范数

(1) 大M单纯形法：

$$(LP)\quad \min\ c^T x \qquad\qquad (LP)'\quad \min\ \bar{f}(x)=c^T x+M\sum_{j=n+1}^{n+m} x_j$$

$$s.t.\quad Ax=b \quad \overset{\text{令}M\text{充分大}}{\Longrightarrow} \quad s.t.\quad Ax+x_s=b$$

$$x\ge 0 \qquad\qquad x\ge 0,\quad x_s\ge 0$$

其中，$x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$为人工变量，

$$x_s=(x_{n+1},\cdots,x_{n+m})^T$$

A是m行n列的矩阵，所以有m个等式，n个未知数.

定理2.3.5 用单纯形法求解$(LP)'$

(1) 设$(LP)'$是可解的并且求得的最优解为$\bar{x} := ((x^*)^T, (x_s^*)^T)^T$.

若x_s^*=0，则x^*是(LP)的一个最优解；若$x_s^* \neq 0$，则(LP)无可行解。

（2）若$(LP)'$无最优解，则(LP)无最优解。

证明: (1) 先证x*是(LP)的最优解。（需要证，a. 可行；b. 最优）

a. 由于 $\bar{x}$ 可行，故（x*,x_s*）非负，且Ax*+x_s*=Ax*=b, 所以x*是（LP）的可行解；

b. 由 $\bar{x}$ 最优，可得对任意的（x,0）(x非负)满足Ax=b,都有

$$\overline{f(x)} = c^T x + 0 \geq c^T x^* + 0 = \overline{f(x^*)}$$

即 $f(x^*) \leq f(x)$ ， 所以x*是(LP)的最优解.

再证第二个子结论：无可行解。（反证）

假设(LP)有可行解x`,则x`非负，且Ax`=b，从而 $\tilde{x} = (x', 0)^T$ 是(LP)`的可行解，且由于M充分大，故

$$\overline{f(\tilde{x})} = c^T x' + 0 \leq c^T x^* + M\|x_s^*\|_1 = \overline{f(x^*)}$$

这与 $\bar{x}$ 是最优解矛盾.

(2) 设(LP)有最优解，则是可行解，由(1)知(LP)` 有最优解 ,矛盾 ！

例：用大M单纯形法解线性规划

$$
\begin{aligned}
\min f &= -3x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11, \\
& -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\
& -2x_1 + x_3 = 1, \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0.
\end{aligned}
$$

解：引入松弛变量x5, 人工变量x6,x7，并取M=10,将上述问题改写为

$$
\begin{aligned}
\min \overline{f} &= -3x_1 + x_2 + x_3 + 10x_6 + 10x_7 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 11, \\
& -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 3, \\
& -2x_1 + x_3 + x_7 = 1, \\
& x_1,\ x_2, \cdots,\ x_7 \ge 0.
\end{aligned}
\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

取B=(P5,P6,P7)=I, 则N=(P1,P2,P3,P4),b\`=b=(11,3,1)^T，

c_B=(0,10,10)^T，c_N=(-3,1,1)^T，$B^{-1}N=N$ $\sigma_N=c_N^T-c_B^TN=(57,-9,-29,10)^T$

取判别数-29对应的列计算θ分别为11,3/2,1，故选择主元为1， 得初始单纯形表为

c_j			-3	1	1	0	0	10	10	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	
0	P_5	11	1	-2	1	0	1	0	0	11
10	P_6	3	-4	1	2	-1	0	1	0	3/2
10	P_7	1	-2	0	(1)	0	0	0	1	1
σ_j			57	-9	-29	10	0	0	0	

c_j			-3	1	1	0	0	10	10	Θ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	
0	P_5	10	3	-2	0	0	1	0	-1	/
10	P_6	1	0	(1)	0	-1	0	1	-2	1
1	P_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	/
σ_j			-1	-9	0	10	0	0	29	

c_j			-3	1	1	0	0	10	10	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	
0	P_5	12	(3)	0	0	-2	1	2	-5	4
1	P_2	1	0	1	0	-1	0	1	-2	/
1	P_3	1	-2	0	1	0	0	0	1	/
σ_j			-1	0	0	1	0	9	11	

c_j			-3	1	1	0	0	10	10	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	
-3	P_1	4	(1)	0	0	-2/3	1/3	2/3	-5/3	
1	P_2	1	0	1	0	-1	0	1	-2	
1	P_3	9	0	0	1	-4/3	2/3	4/3	-7/3	
σ_j			0	0	0	1/3	1/3	29/3	26/3	

所以判别数非负，故得最优解$(4,1,9,0,0,0,0)^T$，人工变量均为0，故原问题的解为$(4,1,9,0)^T$，**最优值为-3*4+1+9=-2.**

2.13 用大M法求解下列线性规划问题.

(1)
$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
\min & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 10, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(2)
$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\min & -2x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & - & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 2, \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & 1, \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \geq & 1, \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

(2)　二阶段单纯形法求解：

$$(\boldsymbol{LP})\quad \min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

$$s.t.\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}\geq 0$$

第一阶段：单纯形法求解以下线性规划

$$(\boldsymbol{LP})''\quad \min\quad \omega=\sum_{j=n+1}^{n+m}\boldsymbol{x}_j$$

$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}\geq 0\ ,\quad \boldsymbol{x}_s\geq 0$$

其中，$\boldsymbol{x}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{n+m}$为人工变量，

$\boldsymbol{x}_s=(\boldsymbol{x}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{n+m})^T$

定理2.3.6　设$(LP)''$是非退化的，最优解为$x^* = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ x_s \end{pmatrix}$，最优值为$\omega^*$

(i)　若$\omega^* > 0$，即$x_s \neq 0$，此时(LP)无可行解；

(ii)　若$\omega^* = 0$，即$x_s = 0$，此时得到(LP)的一个初始基可行解$\hat{x}$

证明:(1)设(LP)有可行解$\boldsymbol{x}$，则$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0$；于是$(\boldsymbol{x}, 0)^T$是$(LP)''$的可行解，且此时

$$\omega = 0 < \omega^*,$$

这与ω^*是最优值矛盾. 所以(LP)没有可行解.

(2)因为人工变量均为0，而x^*是$(LP)''$的一个基可行解，删除此时的人工变量，得到(LP)的一个基可行解.

第二阶段：从第一阶段得到的基可行解开始，用单纯形法求解(LP)

例：用二阶段单纯形法解线性规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

解：第一阶段 引入人工变量x4,x5，构造辅助问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_4 + x_5 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 4, \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 3, \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

取B=(P4，P5)=I，则N=(P1,P2,P3)，b`=b=(4,3)^T，c_B=(1,1)^T，c_N=(0,0,0)^T，

$$B^{-1}N = N$$

$$\sigma_N = c_N^T - c_B^T N$$

$$= (-5,-4,-3)^T$$

取判别数-5对应的列计算θ分别为2,1，故选择主元为3，用单纯型法计算得：

c_j			0	0	0	1	1	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	
1	P_4	4	2	1	2	1	0	2
1	P_5	3	(3)	3	1	0	1	1
σ_j			-5	-4	-3	0	0	
1	P_4	2	0	-1	(4/3)	1	2/3	3/2
0	P_1	1	1	1	1/3	0	1/3	3
σ_j			0	1	-4/3	0	5/3	
0	P_3	3/2	0	-3/4	1	3/4	1/2	
0	P_1	1/2	1	5/4	0	-1/4	1/6	
σ_j			0	0	0	1	2/3	

最优解为(1/2,0,3/2,0,0)^T,从而得原问题的基可行解为(1/2,0,3/2)^T,且由上表知基矩阵为B=(P3,P1).

第二阶段 用单纯形法求解原线性规划

$$\begin{aligned} \min\quad & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

注：用初始的单纯形表即为第一阶段的最后一张表，但由于目标函数不同，需要重新结算判别数。因为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}, \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}_N = 1$$

故判别数 $\sigma_N = c_N^T - c_B^T N = 1 - (1 \quad 4)\begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} = -\frac{13}{4}$

用单纯型法计算得：

c_j			4	1	1	ϑ_i
c_B	B	b	p_1	p_2	p_3	
1	P_3	3/2	0	-3/4	1	/
4	P_1	1/2	1	(5/4)	0	2/5
σ_j			0	-13/4	0	
1	P_3	9/5	3/5	0	1	
1	P_2	2/5	4/5	1	0	
σ_j			13/5	0	0	

最优解为$(0,2/5,9/5)^T$,最优值为11/5.

2.14 用二阶段法求解下列线性规划问题.

(1)
$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6, \\
& 4x_1 & + & 5x_2 & - & 6x_3 & = & 6, \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5, \\
& -6x_1 & + & 10x_2 & + & 5x_3 & \leq & 20, \\
& 5x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \geq & 15, \\
& x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

四、对偶理论与最优性条件

1、对偶规划

记原线性(LP)：规划

$$\begin{aligned} \min\ & c^{\mathrm{T}} x \\ \text{s.t.}\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

构造线性(DP)：规划

$$\begin{aligned} \max\ & b^{\mathrm{T}} y \\ \text{s.t.}\ & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

其中A是m行n列矩阵，x， c是n维向量，y， b是m维向量，称(DP)是(LP)的对偶线性规划，称(LP)为原线性规划。

注　原线性规划与其对偶规划的特点

(1) “ min , ≥ ” 与 “ max ,≤” 相对应；

(2) 约束条件的系数矩阵互为转置；

(3) 价格系数和右端向量位置互换

(4) 一个问题中的变量个数等于另一个问题中的不等式约束条件的个数

(5) 变量皆非负。

2、（LP）与(DP) 的性质

定理 2.2.4 (对合性)　(DP)的对偶规划为(LP) 。

(DP)

$$\begin{aligned} \max\ & b^{\mathrm{T}} y \\ \text{s.t.}\ & A^T y \le c, \\ & y \ge 0. \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min\ & (-b)^{\mathrm{T}} y \\ \text{s.t.}\ & -A^T y \ge -c, \\ & y \ge 0. \end{aligned}$$

$\Downarrow$ 对偶规划

$$\begin{aligned} \max\ & (-c)^T x \\ \text{s.t.}\ & (-A)x \le -b, \\ & x \ge 0. \end{aligned} \iff \begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t.}\ & Ax \ge b, \\ & x \ge 0. \end{aligned}$$

$\Uparrow$ $(\boldsymbol{LP})$

定理 2.2.5 若(LP)的第k个约束为等式约束，则 (DP)的第k个变量为自由变量。

设等式约束为$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k \\ -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \ldots - a_{kn}x_n \geq -b_k \end{cases}$$

因此,(LP)等价于

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & \ldots \\ & a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \geq b_k \\ & -a_{k1}x_1 - \ldots - a_{kn}x_n \geq -b_k \\ & \ldots \\ & x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

其对偶规划为

$$\max \quad b_1 y_1 + \ldots + b_k(y_k' - y_k'') + \ldots + b_m y_m$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & a_{11}y_1 + \ldots + a_{k1}(y_k' - y_k'') + \ldots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ & \ldots \\ & a_{1n}y_1 + \ldots + a_{kn}(y_k' - y_k'') + \ldots + a_{mn}y_m \leq c_n \\ & y_1, \ldots, y_k', y_k'', \ldots, y_m \geq 0 \end{aligned}$$

令y_k=y_k\`-$y_k$\`\`,则y_k没有任何约束称为自由变量。

定理 2.2.6 若(LP)的第l个变量为自由变量, 则(DP) 的第l个约束为等式约束。

由上一定理及对偶规划的对合性可得。

标准型及其对偶规划:

标准型	对偶规划
$(LP)\quad \min\ c^T x$	$(DP)\quad \max\ b^T y$
$s.t.\quad Ax=b$	$s.t.\quad A^T y \le c$
$x \ge 0$	

写出以下线性规划的对偶规划问题：

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \min\ & 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 \\
\text{s.t.}\ & 4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \geq 9, \\
& x_1 + x_2 - 4x_3 - x_5 \geq 11, \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.
\end{aligned}
$$

解：对偶规划为

$$
\begin{aligned}
\max\ & 9y_1 + 11y_2 \\
\text{s.t.}\ & 4y_1 + y_2 \leq 3 \\
& -y_1 + y_2 \leq 2 \\
& 3y_1 - 4y_2 \leq -4 \\
& y_1 \leq 2 \\
& y_2 \leq 0 \\
& y_1,\ y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llrrrrrrrrr}
(2) & \min & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & & \\
& \text{s.t.} & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6, \\
& & -2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & \geq & 3, \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

解：对偶规划为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 6y_1 + 3y_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2y_1 - 2y_2 \leq 3 \\
& 4y_1 + 3y_2 \leq 2 \\
& 3y_1 - y_2 \leq 1 \\
& y_1 \leq 4 \\
& y_1 \text{自由变量，} y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

3. 对偶理论

考虑 $(LP)'$ $\min \; c^T x$ $\quad s.t. \; Ax \geq b$ 和对偶规划 $(DP)'$ $\max \; b^T y$ $\quad s.t. \; A^T y = c, \; y \geq 0$

定理1（弱对偶定理）设x, y分别是$(LP)'$ 与$(DP)'$ 的可行解，则$b^T y \leq c^T x$

证明：$b^T y \leq (Ax)^T y = x^T A^T y = c^T x$

推论1：设x^*, y^*分别是$(LP)'$ 与$(DP)'$ 的可行解，且$c^T x^* = b^T y^*$，则x^*, y^*分别是$(LP)'$ 与$(DP)'$ 的最优解。

证明：设x是(LP)′ 任意可行解，则$c^T x^* = b^T y^* \leq c^T x$,即$x$最优

推论2：若$(LP)'$ 可行但无下界，则$(DP)'$ 无可行解；若$(DP)'$ 可行但无上界，则$(LP)'$ 无可行解.

证明：反证

定理2 （强对偶定理）

对于$(LP)'$与$(DP)'$,下面五个命题是等价的：

(1) $(LP)'$可行有下界；

(2) $(DP)'$可行有上界；

(3) $(LP)'$有最优解；

(4) $(DP)'$有最优解；

(5) $(LP)'$与$(DP)'$均是可行的.

且在任一情形下，原、对偶规划的最优值相同.

4、最优性条件

考虑线性规划标准型(LP)及其对偶问题(DP):

$$(LP)\quad \min\ c^T x \qquad\qquad (DP)\quad \max\ b^T y$$
$$\quad s.t.\ \ Ax=b \qquad\qquad\qquad s.t.\ \ A^T y \le c$$
$$x \ge 0$$

定理2.2.9（互补松弛条件）

假设x^*, y^*分别是(LP)与(DP)的可行解，则x^*, y^*分别是(LP)与(DP)的最优解 $\Leftrightarrow (x^*)^T(A^T y^* - c) = 0.$

证明："$\Rightarrow$"由$c^T x^* = b^T y^* = (Ax^*)^T y^* = (x^*)^T A^T y^*$,移项得证;

"$\Leftarrow$"由$(x^*)^T(A^T y^* - c) = 0 \Rightarrow (Ax^*)^T y^* - c^T x^* = 0$

$$\Rightarrow (Ax^*)^T y^* = b^T y^* = c^T x^*,\text{得证.}$$

定理2.2.10（最优性条件）

假设F、D分别是(LP)与(DP)的可行集，则x^*, y^*分别是(LP)与(DP)的最优解$\Leftrightarrow x^* \in F$，$y^* \in D$，$(x^*)^T (A^T y^* - c) = 0$.

对于以下线性规划及其对偶问题，写出最优性条件：

原问题
$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ s.t. \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

对偶问题
$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ s.t. \quad & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

对于一般线性规划(LP)及其对偶问题(DP):

$$(LP)\quad \min\ c^T x \qquad s.t.\ Ax=b,\ x\ge 0$$

$$(DP)\quad \max\ b^T y \qquad s.t.\ A^T y\le c$$

$$(DP)'\quad \max\ b^T y \qquad s.t.\ A^T y+s=c,\ s\ge 0$$

互补松弛条件：$(x^*)^T(A^T y^* - c)=0$

最优性条件： $x^*\in F$，$y^*\in D$，$(x^*)^T(A^T y^* - c)=0$

定理2.2.11（最优性条件）

$x^*\in R^n, (y^*, s^*)\in R^m\times R^n$分别是$(LP)$ 与$(DP)'$的最优解

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax^* = b \\ A^T y^* + s^* = c \\ x^*\ge 0,\ s^*\ge 0,\ (x^*)^T s^* = 0 \end{cases}$$

例：已知线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \ge 4 \\
& 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \ge 3 \\
& x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}
$$

其对偶规划问题的最优解为$y_1^* = \dfrac{4}{5}, y_2^* = \dfrac{3}{5}$,原问题的最优值为5。试用最优性条件找出原问题的最优解。

解：先写出对偶规划

$$\max \quad 4y_1 + 3y_2$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 + 2y_2 \le 2 \qquad (1)$$

$$y_1 - y_2 \le 3 \qquad (2)$$

$$2y_1 + 3y_2 \le 5 \qquad (3)$$

$$y_1 + y_2 \le 2 \qquad (4)$$

$$3y_1 + y_2 \le 3 \qquad (5)$$

$$y_1, y_2 \ge 0$$

将y_1^* , y_2^*的值代入约束条件，得(2),(3),(4)为严格不等式；由互补松弛条件得$x_2^*=x_3^*=x_4^*=0$。因y_1^* , $y_2^*>0$ ，原问题的两个约束条件应取等式，故有

$$x_1^*+3x_5^*=4; \quad 2x_1^*+x_5^*=3$$

求解后得到$x_1^*=x_5^*=1$; 故原问题的最优解为$x^*=(1\ 0\ 0\ 0\ 1)^T$.

1、设线性规划

$$\begin{aligned} \max\quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 \le 5, \\ & -x_1 + x_2 \le 0, \\ & 6x_1 + 2x_2 \le 21, \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

（1）写出上述线性规划的对偶线性规划问题；

（2）已知上述线性规划的最优解为$(x_1^*, x_2^*)^T = (\frac{11}{4}, \frac{9}{4})^T$，利用线性规划的最优性条件求出其对偶线性规划问题的最优解.